

Chương I: VECTO

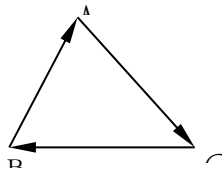
Bài 1: CÁC ĐỊNH NGHĨA

- ✓ Vector là 1 đoạn thẳng có hướng.
- ✓ Giá của vector là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối.
- ✓ Hai vector cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau. Hai vector cùng phương thì chúng có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.
- ✓ Hai vector bằng nhau khi chúng có cùng độ dài và cùng hướng.
- ✓ Hai vector đối nhau khi chúng có cùng độ dài và ngược hướng.

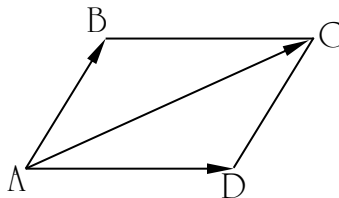
1. Cho ΔABC . Có thể xác định được bao nhiêu vector khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C.
2. Cho ΔABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, BC, CA.
 - a. Xác định các vector cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.
 - b. Xác định các vector bằng $\overrightarrow{NP}$.
 - c. Tìm các vector đối của vector $\overrightarrow{MP}$.
3. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O.
 - a. Tìm các vector $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{OA}$
 - b. Tìm các vector bằng $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}$.
 - c. Tìm các vector đối của vector $\overrightarrow{AB}$.
4. Cho hình thoi ABCD có tâm O. Hãy cho biết điều nào sau đây đúng?
 - a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$
 - b. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
 - c. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$
 - d. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$
 - e. $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$

Bài 2: TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

- Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



- Quy tắc hình bình hành: ABCD là hình bình hành thì: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$



- Quy tắc trừ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
- Tính chất trung điểm
- I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
- G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

PHÉP CỘNG VECTO

1. Cho bốn điểm A, B, C, D. Tìm các vector tổng sau đây:
 - a. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

- b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$
2. Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh:
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
3. Chứng minh nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
4. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F tùy ý. Chứng minh rằng:
 a. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$
 b. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$
5. Cho 8 điểm A, B, C, D, E, F, G, H. Chứng minh rằng:
 a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$
 b. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{HF}$
6. Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng:
 a. $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$
 b. $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$
 c. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
 d. M là một điểm tùy ý, chứng minh: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$
7. Cho tứ giác ABCD. Gọi O là trung điểm AB. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$
8. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, và P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và BC. Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.
9. Cho tam giác ABC. Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh rằng $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$

PHÉP TRỪ VECTO

10. Cho tam giác đều ABC. Các đẳng thức sau đúng hay sai? Giải thích?
 a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
 b. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC}$
 c. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}|$
11. Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$
12. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng:
 a. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE} = \vec{0}$
 b. $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FC} - \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{FB}$
 c. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB}$
13. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Chứng minh rằng:
 a. $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$
 b. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$
 c. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$
 d. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$
14. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC, và BC. Tìm hiệu $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$.
15. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
16. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính độ dài các vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

Bài 3: TÍCH CỦA VECTO VỚI MỘT SỐ

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTO

1. Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$
2. Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$
3. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD của tứ giác ABCD. Chứng minh rằng:
 - a. $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.
 - b. $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$
4. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và CD.
 - a. Chứng minh: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$
 - b. Chứng minh: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$
5. Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của đoạn AM. Chứng minh rằng:
 - a. $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$
 - b. $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tùy ý.
6. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$
7. Cho tam giác ABC. Gọi I, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC và G là trọng tâm. Chứng minh rằng:
 - a. $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$
 - b. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$
8. Cho $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G và G'. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$. Suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm.
9. Cho tứ giác ABCD. Các điểm M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.
10. Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.
11. Cho tam giác đều ABC. Gọi H là điểm đối xứng của trọng tâm G qua B. Chứng minh rằng:
 - a. $\overrightarrow{HA} - 5\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$
 - b. $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH} = 5\overrightarrow{AG}$
12. Cho tam giác đều ABC có G là trọng tâm và M là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M đến BC, AC, AB. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

PHÂN TÍCH MỘT VECTO THEO HAI VECTO KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

13. Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm trên đoạn BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng :
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$
14. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho: $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN.
 - a. Chứng minh: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$
 - b. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
15. Cho tam giác ABC. Lấy trên cạnh BC điểm N sao cho $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BN}$. Tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
16. Cho tam giác ABC. Lấy lần lượt trên hai cạnh AB và AC các điểm M, N sao cho M là trung điểm của AB và $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Tính $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

17. Cho tam giác ABC. Lấy điểm E thỏa $5\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{EC}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$
18. Cho tam giác ABC. Lấy điểm M trên cạnh AC thỏa $3AM = 7MC$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{10}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{10}\overrightarrow{BC}.$$
19. Cho tam giác ABC. Lấy điểm I trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Tính $\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
20. Cho $\triangle ABC$. Trên hai cạnh AB, AC lấy 2 điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M là trung điểm DE và I là trung điểm BC. Chứng minh rằng:
 a. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$
 b. $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$
21. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên 2 cạnh AB, AC sao cho $MB = 2MA$ và $NA = 3NC$. Gọi K và D lần lượt là trung điểm của MN, BC. Hãy tính các vector $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$ theo các vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài 4: HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2); \vec{b} = (b_1; b_2)$

- Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$
- Tọa độ của $\vec{a} \pm \vec{b}, k\vec{a}$:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$$
- Công thức tính tọa độ của vectơ:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$
- Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng: I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$
- Tọa độ trọng tâm tam giác: G là trọng tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

- Viết tọa độ của các vectơ sau:
 $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}; \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}; \vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}; \vec{d} = 3\vec{i}; \vec{e} = -5\vec{j}.$
- Cho các vectơ $\vec{a} = (1; 2), \vec{b} = (-3; 1), \vec{c} = (-4; 2)$
 a. Tìm tọa độ của các vector

$$\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}; \vec{v} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}; \vec{w} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + 4\vec{c}$$

 b. Tìm các số k, l sao cho $\vec{a} = k\vec{b} + l\vec{c}$

3. Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; -4)$, $\vec{c} = (-7; 2)$
- Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$.
 - Tìm tọa độ vector $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.
 - Phân tích vector $\vec{c}$ theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
4. Tìm tọa độ điểm B biết:
- $\vec{OB} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$
 - $\vec{OB} = 5\vec{j}$
 - $\vec{AB} = (1; -4)$ và $A(3; 5)$
 - $\vec{AB} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ và $A(1; -1)$
 - $\vec{AB} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$ và $\vec{OA} = \vec{i} - \vec{j}$
5. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1; -2)$, $B(0; 4)$, $C(3; 2)$
- Tìm tọa độ các vector $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$.
 - Tìm tọa độ trung điểm I của AB.
 - Tìm tọa độ điểm D đối xứng với B qua C.
 - Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
 - Tìm tọa độ điểm M sao cho: $\vec{CM} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$.
 - Tìm tọa độ điểm N sao cho: $\vec{AN} + 2\vec{BN} - 4\vec{CN} = \vec{0}$.
6. Cho ba điểm $A(2; 5)$, $B(1; 1)$, $C(3; 3)$
- Tìm tọa độ điểm D sao cho $\vec{AD} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC}$.
 - Tìm tọa độ điểm M sao cho $\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{0}$
 - Tìm tọa độ điểm E sao cho ABCE là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm hình bình đó.
7. Cho hình bình hành ABCD có $A(-1; -2)$, $B(3; 2)$, $C(4; -1)$. Tìm tọa độ đỉnh D.
8. Trong mp Oxy cho $\triangle ABC$ có $A(4; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(3; -2)$.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.
 - Tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$.
9. Các điểm $M(-4; 1)$, $N(2; 4)$, $P(2; -2)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC. Tính tọa độ các đỉnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác ABC và MNP trùng nhau.
10. Xét xem các cặp vector sau có cùng phương hay không? Trong trường hợp cùng phương thì chúng cùng hướng hay ngược hướng?
- $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (-10; -15)$
 - $\vec{u} = (1; 7)$, $\vec{v} = (2; 14)$
 - $\vec{u} = (0; 7)$, $\vec{v} = (0; 8)$
 - $\vec{m} = (-2; 1)$, $\vec{n} = (-6; 3)$
 - $\vec{e} = (0; 5)$, $\vec{f} = (3; 0)$
 - $\vec{c} = (3; 4)$, $\vec{d} = (6; 9)$
 - $\vec{e} = (2; 5)$, $\vec{f} = (3; 6)$
11. a. Cho $A(-1; 8)$, $B(1; 6)$, $C(3; 4)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
b. Cho $A(1; 1)$, $B(3; 2)$ và $C(m + 4; 2m + 1)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.
12. Cho ba điểm $A(0; -4)$, $B(-5; 6)$, $C(3; 2)$
- Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
 - Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
13. Cho tam giác ABC có $A(-1; 1)$, $B(5; -3)$, đỉnh C nằm trên trục Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox. Tìm tọa độ đỉnh C.
14. Trong mp Oxy cho $\triangle ABC$ có $A(0; 2)$, $B(6; 4)$, $C(1; -1)$.

a. Gọi $D(3; 1)$. CMR : 3 điểm B, C, D thẳng hàng.

b. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

15. Cho tam giác ABC có $A(-3; 6), B(9; -10), C(-5; 4)$

a. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác BGCD là hình bình hành.

16. Cho 3 điểm $A(1; -2), B(0; 4), C(3; 2)$.

a. Chứng minh A, B, C không thẳng hàng.

b. Tìm tọa độ điểm D đối xứng với B qua C.

c. Tìm tọa độ các điểm M, N sao cho:

$$\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$$